Práctica 9 - Tautologías, Contradicciones, equivalencias lógicas, conectivas.

# 1.- Retome el Ejercicio 1 de la Práctica 1:

## a.- Seleccione un par de enunciados que sean lógicamente equivalentes (que tengan el mismo significado). Demuéstrelo mediante tablas de verdad.

* i: "Si Juan contrata un informático entonces el proyecto tendrá éxito"
* ii: "Si el proyecto no tiene éxito entonces Juan no ha contratado un informático"
  + p: Juan contrata un informático
  + q: El proyecto es exitoso
* Tabla de verdad i:

| **p** | **q** | **p → q** |
| --- | --- | --- |
| v | v | v |
| v | f | f |
| f | v | v |
| f | f | v |

* Tabla de verdad ii:

| **p** | **q** | **¬p** | **¬q** | **¬q → ¬p** |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| v | v | f | f | v |
| v | f | f | v | f |
| f | v | v | f | f |
| f | f | v | v | f |

* Como los valores de verdad de la última columna de cada tabla son iguales, se puede concluir que ambos enunciados son lógicamente equivalentes.

## b.- Para cada ítem construya un enunciado que sea lógicamente equivalente.

### i.- "Juan necesita un matemático o un informático."

* "Juan no necesita un matemático y no necesita un informático"

### ii.- "Si Juan necesita un informático entonces necesita un matemático."

* "Si Juan no necesita un matemático, entonces no necesita un informático"

### iii.- "Si Juan no necesita un matemático entonces necesita un informático."

* "Si Juan no necesita un informático, entonces necesita un matemático"

# 2.- Sean A, B fbfs que cumplen que (¬A ∨ B) es tautología. Sea C una fbf cualquiera. Determinar, si es posible, cuáles de las siguientes fbfs son tautologías y cuáles contradicciones. Justificar las respuestas.

* Para que la fórmula (¬A ∨ B) sea una tautología, se tienen que dejar de tener en cuenta los casos en que A=V y B=F, ya que en esos casos toma el valor de verdad F.

## i. ((¬(A → B)) → C)

| **A** | **B** | **C** | **¬(A → B)** | **((¬(A → B)) → C)** |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V | V | F | V |
| V | V | F | F | V |
| V | F | V | V | V |
| V | F | F | V | F |
| F | V | V | F | V |
| F | V | F | F | V |
| F | F | V | F | V |
| F | F | F | F | V |

* Quitando los casos en que V(A)=V y V(B)=F, armando la tabla de verdad, llegamos a que ((¬(A → B)) → C) es una tautología.

## ii. (C → ((¬A) ∨ B))

| **A** | **B** | **C** | **¬A** | **(¬A) ∨ B** | **(C → ((¬A) ∨ B))** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V | V | F | V | V |
| V | V | F | F | V | V |
| V | F | V | F | - | - |
| V | F | F | F | - | - |
| F | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | V | V |
| F | F | V | V | V | V |
| F | F | F | V | V | V |

* Quitando los casos en que V(A)=V y V(B)=F, armando la tabla de verdad, llegamos a que (C → ((¬A) ∨ B)) es tautología.

## iii. ((¬A) → B)

| **A** | **B** | **¬A** | **((¬A) → B)** |
| --- | --- | --- | --- |
| V | V | F | V |
| V | F | F | - |
| F | V | V | V |
| F | F | V | F |

* Quitando los casos en que V(A)=V y V(B)=F, armando la tabla de verdad, llegamos a que ((¬A) → B) no es tautología ni contradicción.

# 3.- ¿Es cierto que dadas A y B fbfs cualesquiera, siempre ocurre que si A y A → B son tautologías entonces B también lo es? Fundamentar. Ejemplificar con algunos ejemplos concretos escritos en lenguaje natural.

Se puede demostrar por el absurdo. Asumimos que las hipótesis son verdaderas y la conclusión falsa:

1. A es una tautología
2. A → B es una tautología
3. B no es una tautología

Por (c), sabemos que existe un valor de verdad tal que v(B)=F

* Teniendo en cuenta a, para todo valor v(A)=V
* Teniendo en cuenta b, para todo valor v(A → B) = V
* Por definición de valoración, por (a) y (b), sabemos que v(B) = V, ya que si tomara el valor F, (b) no se cumpliría.

Ejemplo en lenguaje natural:

* “Si la pelota es redonda, entonces la pelota al empujarla gira”
* A: “La pelota es redonda” ⇒ Tautología
* B: “La pelota al empujarla gira” ⇒ Tautología
* A → B ⇒ Tautología

# 4.- Sea A una fbf donde aparecen sólo los conectivos ∧, ∨, ¬ . Sea A’ la fbf que se obtiene a partir de A reemplazando cada ∧ por ∨ y cada ∨ por ∧. ¿Si A es una tautología, A’ también lo es? Justificar. Ejemplificar con algunos ejemplos escritos en lenguaje natural.

Se puede demostrar que esto no se cumple a través de un contraejemplo.

* Sea A = (p ∨ (¬p)), siendo A una tautología
* El enunciado dice que A’ es cómo A pero con las conectivas invertidas, en ese caso A’ = (p ∨ (¬p))

| **p** | **¬p** | **A = (p ∨ (¬p))** | **A’ = (p ∨ (¬p))** |
| --- | --- | --- | --- |
| V | F | V | F |
| F | V | V | F |

* A es una tautología y A’ una contradicción, por lo tanto, si A es una tautología con sólo conectivos ∧, ∨, ¬, entonces A’ no es tautología.

# 5.- Demostrar que cualquier tautología proposicional que esté escrita usando los conectivos ¬, ∨, ∧,→ contiene alguna ocurrencia ya sea del símbolo ”¬” o del símbolo ”→”. Idea: Demostrar que cualquier fórmula que contenga sólo la conjunción y disyunción puede tomar el valor F.

Se puede demostrar que esto se cumple usando inducción.

* Sea A una fbf tal que sólo cuenta con las conectivas {∨, ∧}
* Sea v una valuación, que asigna el valor (F) a todas las letras, es decir, v(pi)=F para todo pi. En esa valuación, A también va a tomar el valor falso, v(A)=F
* Sea N un número natural que representa la cantidad de conectivos de la fbf
* Caso Base (N=0)
  + No hay conectivos, por lo tanto A es atómica
  + A=p1, v(p1)=F, por lo tanto, v(A)=F
* Hipótesis Inductiva (HI): Asumimos que para toda fbf A que sólo contiene {∨, ∧}, con N o menos conectivos, v(A)=F
* Caso N+1
  + A puede ser de dos formas:
    - A = (B ∨ C)
    - A = (B ∧ C)
  + Tanto B como C tienen N o menos conectivos, por lo tanto, para B y C vale (HI), o sea, v(B)=F y v(C)=F. Y por definición semántica de ∧ y ∨, v(A)=F para ambos casos.
* v(A)=F para cualquier fbf con conectivas {∨, ∧}. A no es una Tautología

| **p1** | **p2** | **A (fbf con conectivas ∨, ∧)** |
| --- | --- | --- |
| V | V | ? |
| V | F | ? |
| F | V | ? |
| F | F | F |

Las conectivas ∨, ∧ no alcanzan para escribir tautologías, se tienen que usar otros conectivos además de esos.

# 6.- ¿Es cierto que en el Cálculo de Enunciados pueden escribirse dos fbfs que tengan diferentes letras de proposición y aún así ambas fbfs sean lógicamente equivalentes?. Fundamentar.

Lo que dice el enunciado es cierto, supongamos que tengo (p → q) y (r → s), al probar que sean lógicamente equivalentes, ((p → q) ↔ (r → s)), la prueba es verdadera:

| **(p → q)** | **(r → s)** | **((p → q) ↔ (r → s))** |
| --- | --- | --- |
| V V V | V V V | V |
| V F F | V F F | V |
| F V V | F V V | V |
| F F V | F F V | V |

# 7.- Para las tablas dadas a continuación, encontrar al menos dos fbf del Cálculo de Enunciados que las tenga por tablas de verdad. Ayuda: alcanza con usar p, q, ¬, ∧, ∨.

## Tabla 1:

| **p** | **q** | **f?** |
| --- | --- | --- |
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | V |

* ((p ∨ (¬p) ∨ (q ∨ (¬q))
* ((p ∨ q) ∨ (¬q))

## Tabla 2:

| **p** | **q** | **f?** |
| --- | --- | --- |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | F |

* (q ∧ (p ∨ q))
* ((p ∨ (¬p)) ∧ q)

## Tabla 3:

| **p** | **q** | **f?** |
| --- | --- | --- |
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | F |
| F | F | F |

* (p ∧ (p ∨ q))
* (p ∧ (p ∨ (¬p)))

# 8.- Determinar cuáles de las siguientes fbfs son lógicamente implicadas por la fbf (A ∧ B). Fundamentar. Def. de implicación lógica, ver def. 1.7 del Hamilton.

Tabla de verdad de A ∧ B

| **A** | **B** | **A ∧ B** |
| --- | --- | --- |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

## i.- A

| **A** | **B** | **A ∧ B** | **(A ∧ B) → A** |
| --- | --- | --- | --- |
| V | V | V | V |
| V | F | F | V |
| F | V | F | V |
| F | F | F | V |

* A ∧ B implica lógicamente a A porque construimos la tabla de verdad y la implicación es una tautología.

## ii.- B

| **A** | **B** | **A ∧ B** | **(A ∧ B) → B** |
| --- | --- | --- | --- |
| V | V | V | V |
| V | F | F | V |
| F | V | F | V |
| F | F | F | V |

* A ∧ B implica lógicamente a B porque construimos la tabla de verdad y la implicación es una tautología

## iii.- A ∨ B

| **A** | **B** | **A ∧ B** | **A ∨ B** | **(A ∧ B) → (A ∨ B)** |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | V |
| F | V | F | V | V |
| F | F | F | F | V |

* A ∧ B implica lógicamente a A ∨ B porque construimos la tabla de verdad y la implicación es una tautología

## iv.- ¬A ∨ B

| **A** | **B** | **A ∧ B** | **¬A ∨ B** | **(A ∧ B) → (¬A ∨ B)** |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | F | V |
| F | V | F | V | V |
| F | F | F | V | V |

* A ∧ B implica lógicamente a ¬A ∨ B porque construimos la tabla de verdad y la implicación es una tautología

## v.- ¬B → A

| **A** | **B** | **A ∧ B** | **¬B → A** | **(A ∧ B) → (¬B → A)** |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | V |
| F | V | F | V | V |
| F | F | F | F | V |

* A ∧ B implica lógicamente a ¬B → A porque construimos la tabla de verdad y la implicación es una tautología

## vi.- A ←→ B

| **A** | **B** | **A ∧ B** | **A <-> B** | **(A ∧ B) → (A <-> B)** |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | F | V |
| F | V | F | F | V |
| F | F | F | V | V |

* A ∧ B implica lógicamente a A ←→ B porque construimos la tabla de verdad y la implicación es una tautología

## vii.- A → B

| **A** | **B** | **A ∧ B** | **A → B** | **(A ∧ B) → (A → B)** |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | F | V |
| F | V | F | V | V |
| F | F | F | V | V |

* A ∧ B implica lógicamente a A → B porque construimos la tabla de verdad y la implicación es una tautología

## viii.- ¬B → ¬A

| **A** | **B** | **A ∧ B** | **¬B → ¬A** | **(A ∧ B) → (¬B → ¬A)** |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | F | V |
| F | V | F | V | V |
| F | F | F | V | V |

* A ∧ B implica lógicamente a ¬B → ¬A porque construimos la tabla de verdad y la implicación es una tautología
* El resultado es el mismo que el del inciso (vii), ya que (A → B) ⇔ (¬B → ¬A)

## ix.- B → ¬A

| **A** | **B** | **A ∧ B** | **B → ¬A** | **(A ∧ B) → (B → ¬A)** |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V | V | F | F |
| V | F | F | V | V |
| F | V | F | V | V |
| F | F | F | V | V |

* A ∧ B no implica lógicamente a B → ¬A porque construimos la tabla de verdad y la implicación no es una tautología (es contingencia)

# 9.- Sea la relación ≤ tal que dadas fbfs A , B se cumple que A ≤ B si A → B es una tautología. Dadas las fbfs: p, p → q, ¬p, p ∧ ¬p, r ∨ ¬r, organizarlas bajo la relación ≤. Representar gráficamente.

La idea del ejercicio es ir haciendo las tablas con cada combinación, por ejemplo:

| **p** | **q** | **(p → (p → q))** |
| --- | --- | --- |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

* (p → (p → q)) no es una tautología, por lo tanto, no se cumple que p ≤ (p → q)

Y así siguiendo con el resto de las fbfs.

# 10.- Sea A una fbf donde aparecen sólo los conectivos ∧, ¬. Sea A’ la fbf que se obtiene a partir de A reemplazando cada ∧ por ∨ y cada letra de proposición por su negación (o sea, cada p por ¬p, cada q por ¬q, etc.). ¿Es cierto que A’ es lógicamente equivalente a ¬A ? Fundamentar. Ejemplificar con algunos ejemplos concretos escritos en lenguaje natural.

Demostración por inducción:

* Sea n el número de conectivos que aparecen en A
* Caso base (n = 0)
  + Sea A = p; A’ = ¬p; y ¬A = ¬p
  + En este caso, A’ es trivialmente equivalente a ¬A
  + Paso de inducción: Supongamos que n > 0, A tiene n conectivos y que toda forma enunciativa con menos de n conectivas posee la propiedad requerida.

Hay 2 formas de construir las formas enunciativas.

* Caso 1: A es de la forma (¬B)
  + B tiene n-1 conectivas, así que por hipótesis de inducción B’ es lógicamente equivalente a ¬B
  + Pero A’ es ¬B’. Por lo tanto, A’ es lógicamente equivalente a ¬(¬B). Partiendo de la definición del caso, A es de la forma ¬B, entonces reemplazamos y nos queda que A’ lógicamente equivalente a ¬A
* Caso 2: A es de la forma (B ∧ C)
  + B y C contiene cada una menos de n conectivas, así que B’ y C’ son lógicamente equivalentes a ¬B y ¬C respectivamente
  + Entonces tenemos que A’ es (B’ ∨ C’). Invertimos el símbolo siguiendo la definición de la proposición que se quiere probar
  + (B’ ∨ C’) ⇔ (¬B ∨ ¬C)
  + (¬B ∨ ¬C) se puede escribir como ¬(B ∧ C)
* Por la definición del caso tenemos que A es de la forma (B ∧ C), entonces reemplazamos
* Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que A’ ⇔ ¬(A)

Queda demostrado bajo inducción que A’ ⇔ ¬A

# 11.- Sea # el operador binario definido como p#q =def (p ∧ ¬q) ∨ (¬p ∧ q). Def. de implicación lógica, ver def. 1.7 del Hamilton.

## i.- Probar que # es asociativo, es decir, x#(y#z) es lógicamente equivalente a (x#y)#z.

| **X** | **Y** | **Z** | **Y#Z=(Y ∧ ¬Z) ∨ (¬Y ∧ Z)** | **X#(Y#Z)=(X ∧ (¬(Y#Z)) ∨ (¬X ∧ (Y#Z))** | **⇔** | **X#Y=(X ∧ ¬Y) ∨ (¬X ∧ Y)** | **(X#Y)#Z=((X#Y) ∧ (¬Z)) ∨ ((¬(X#Y)) ∧ Z)** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V | V | F | V | V | F | V |
| V | V | F | V | F | V | F | F |
| V | F | V | V | F | V | V | F |
| V | F | F | F | V | V | V | V |
| F | V | V | F | F | V | V | F |
| F | V | F | V | V | V | V | V |
| F | F | V | V | V | V | F | V |
| F | F | F | F | F | V | F | F |

* # es asociativo porque doble implicación entre x#(y#z) y (x#y)#z es una tautología.

## ii.- Probar que # es conmutativo, es decir, y#z es lógicamente equivalente a z#y.

| **Y** | **Z** | **Y#Z=(Y ∧ ¬Z) ∨ (¬Y ∧ Z)** | **⇔** | **Z#Y=(Z ∧ ¬Y) ∨ (¬Z ∧ Y)** |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V | F | V | F |
| V | F | V | V | V |
| F | V | V | V | V |
| F | F | F | V | F |
| V | V | F | V | F |
| V | F | V | V | V |
| F | V | V | V | V |
| F | F | F | V | F |

* # es conmutativo, ya que la doble implicación entre Y#Z y Z#Y es una tautología

# 12.- Demostrar que las siguientes fórmulas son lógicamente equivalentes.

//Lo dejo de repaso =)

## i- (p → q) es lógicamente equivalente a (¬p ∨ q)

| **(p** | **→** | **q)** | **←→** | **(¬p** | **∨** | **q)** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V | V | F | F | F | V |
| V | F | F | V | F | F | F |
| F | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | V | V | F |

* La doble implicación entre ambas fbfs no es una tautología, por lo tanto no son lógicamente equivalentes.

## ii- (p ↔ q) es lógicamente equivalente a ((p → q) ∧ (q → p))

| **(p** | **←→** | **q)** | **←→** | **((p** | **→** | **q)** | **∧** | **(q** | **→** | **p))** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V | V | V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | V | F | F | F | F | V | V |
| F | F | V | V | F | V | V | F | V | F | F |
| F | V | F | V | F | V | F | V | F | V | F |

* Dado que la doble implicación entre ambas fbfs es una tautología, ambas fbfs son lógicamente equivalentes.

## iii- (¬(p ∧ q)) es lógicamente equivalente a (¬p ∨ ¬q)

## iv- (¬(p ∨ q)) es lógicamente equivalente a (¬p ∧ ¬q)

Tanto (iii) como (iv) son lógicamente equivalentes por de De Morgan.